**Opakování**: spojitost vzhledem k mn.:

fce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě a vzhledem k M $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in B(a,\delta)\cap M : |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

**Úmluva**: Funkce $f$ je spojitá na M $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f$ je spoj. ve všech bodech M vzhl. k M.

**Definice 7**: • $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ $(d,k\in\mathbb{N})$

je **izometrie**, pokud $\forall x,y\in D_F$:

$$\rho(\underbrace{F(x)}_{\in\mathbb{R}^k},\underbrace{F(y)}) = \rho(\underbrace{x,y}_{\in\mathbb{R}^d}).$$

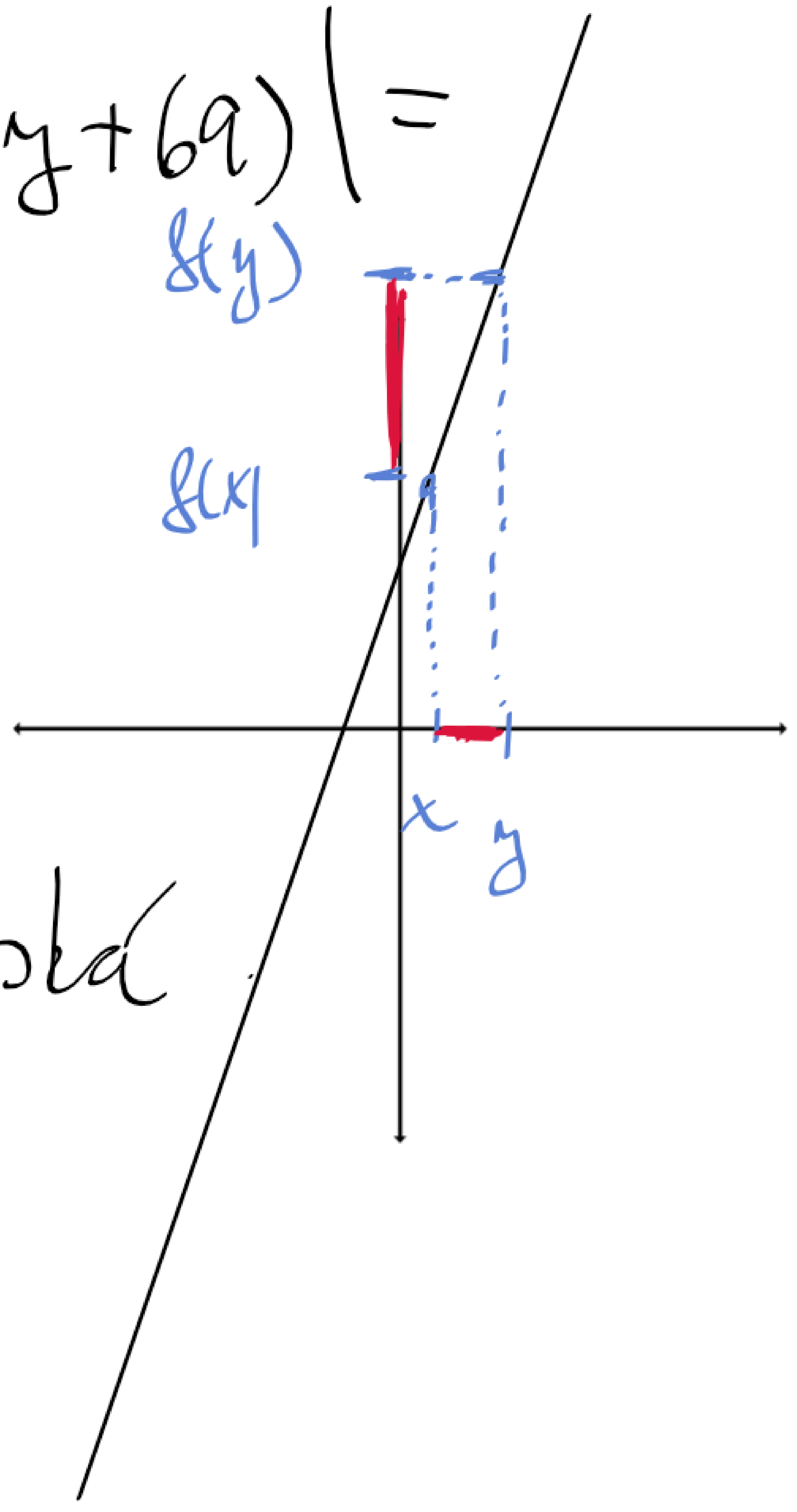
• F je lipschitzovské ~~zobrazení~~ s konstantou L, jestliže $\rho(F(x),F(y)) \le L\cdot\rho(x,y)$.

**Příklad**: • $f(x) = 3x+69$ je lip? konst?

$$|f(x)-f(y)| = |3x+69-(3y+69)| =$$

$$= |3x-3y| \le 3\cdot|x-y|$$

$$|f(x)-f(y)| \le 3\cdot|x-y|$$




Tedy $f$ je 3-lipschitzovská

Tedy $$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le 3$$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le 3$$

- $g(x) = \sin x$ je lip? konst?

Je dokonce 1-lip. Nechť $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \frac{\sin x - \sin y}{x-y} = (*)$$

Podle Lagr. věty: $\exists \xi$ mezi $x, y$:

$(\sin)'(\xi) = (*)$, neboli

$$\cos(\xi) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}.$$

Tedy: $\left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y}\right| = |\cos(\xi)| \le 1$

Tedy: $|\sin x - \sin y| \le 1 \cdot |x-y|$

Tedy sin je 1-lip. (a tedy i 2-lip)

Platí: • Cv.: Pokud $|g'| \le L$ na $I \subseteq \mathbb{R}$, potom $g$ je $L$-lip. na $I$.

• Lebesgueova / Rademacherova věta: lip. fce má skoro všude derivaci

Lemma 8: Položme $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1, 2, \dots, d\})$

$f_i : (x_1, x_2, \dots, x_d) \longmapsto x_i$ (i-tá složka)

$f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_d) = x_i$ (i-tá souř. projekce)

Pak $f_i$ je 1-lip., a tedy spojitá.

Důkaz: zvolme lib. $x, y \in \mathbb{R}^d$. $|f_i(x) - f_i(y)| = |x_i - y_i| = \sqrt{(x_i-y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^d (x_j - y_j)^2} = \rho(x,y)$. $\boxtimes$

## Příklad 9: Polynomy ve více proměnných jsou spojité (polynomiální) funkce:

$$h(x,y) = xy^2 + 2x + y + 6$$

- konstanta je spoj: je dokonce „0-Lip":

$$|6-6| \le 0 \cdot \rho(x,y)$$

- $(x,y) \mapsto x$ , $(x,y) \mapsto y$ jsou spoj. (L8)
- aritmetika spoj. (VOAL + vztah lim & spoj.)

$$x \cdot y \cdot y + 2x + y + 6$$

Je jasné, že analog. postup dokáže spoj. lib. polynomu více prom.

**Příklady:**

- $e^{xy^2+2x+y+6}$ je spoj.

vnější $g(z) = e^z$ je spoj. na $\mathbb{R}$

$h(x,y) = xy^2 + 2x + y + 6$ je spoj. na $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow g \circ h(x,y) = g(h(x,y)) = e^{xy^2+2x+y+6}$$

je spojitá na $\mathbb{R}^2$

- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 \ge 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\} =: K \subset \mathbb{R}^2$$

1-kruh

$f$ spoj. na $D_f$ (automaticky vzhledem k $D_f$).

• $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+|x|+|y|)}{|x|+|y|} = 1$

VOLSF: $g(z) = \dfrac{\ln(1+z)}{z}$ ; $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = 1$

$h(x,y) = |x|+|y|$ $\qquad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) \overset{\uparrow}{=} |0|+|0| = 0$

spoj. $h$

(P): $\exists \delta>0 \ \forall (x,y)\in P((0,0),\delta)$:

$$h(x,y) \neq 0$$

Platí třeba pro $\delta = 9^{9^9}$

Příklad 10: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

• Zkusíme „limitu po osách":

$[y=0]$ (osa $x$):

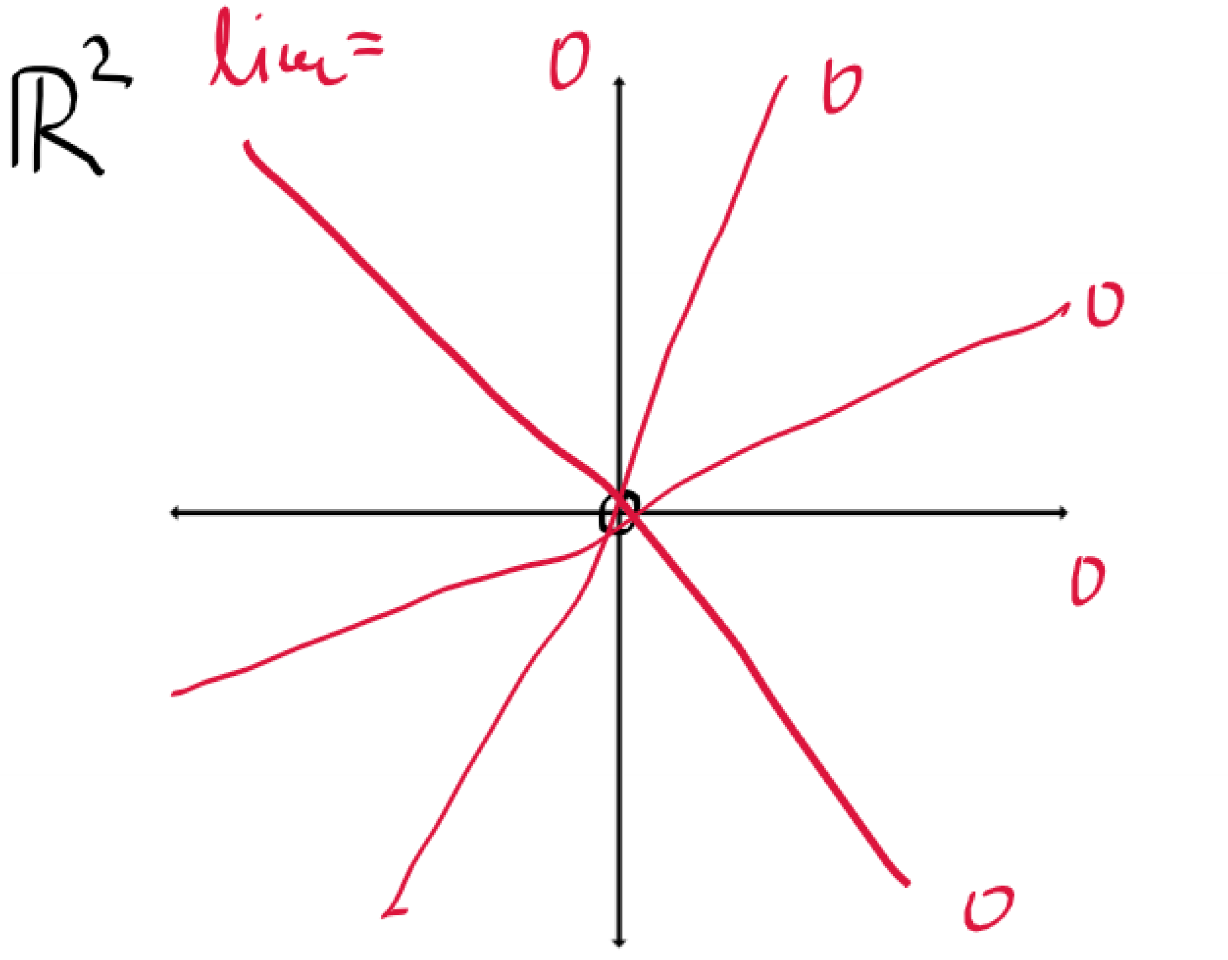
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2\cdot 0}{x^4+0^2} = \lim \frac{0}{x^4} = 0$$

$[x=0]$ (osa $y$): ... vyjde 0.

• Zkusíme „limitu po přímkách $y = \alpha\cdot x$": $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$[y=\alpha\cdot x]$:
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\alpha x}} \frac{x^2\cdot\alpha\cdot x}{x^4+\alpha^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^3}{x^4+\alpha^2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^3}{x^2(\alpha^2+x^2)} = \lim \frac{\alpha x}{\alpha^2+x^2} = \frac{\alpha\cdot 0}{\alpha^2+0^2} = 0.$$

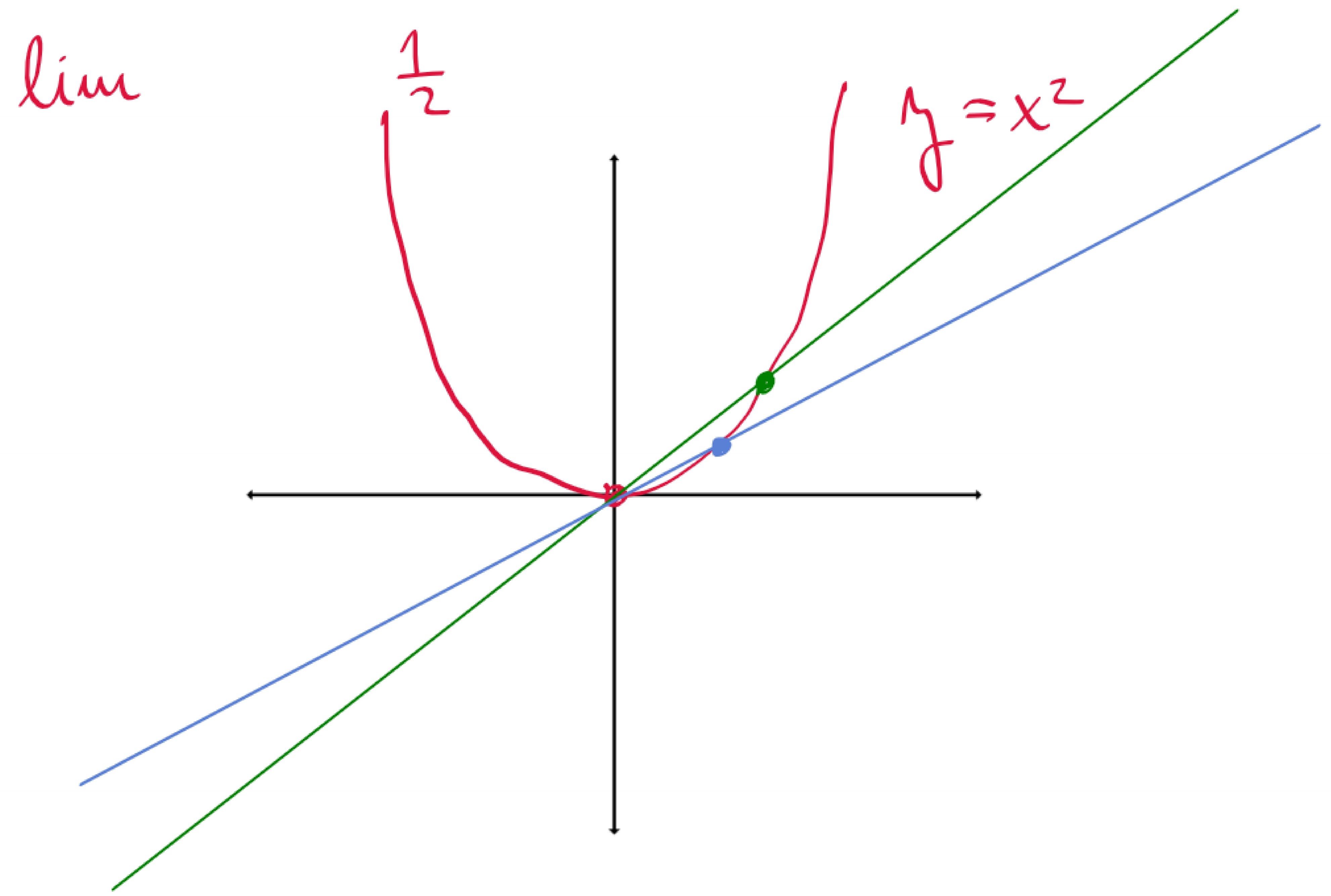



Přesto limita není rovna nule.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{\underbrace{x^4+y^2}_{f(x,y)}}$$

dosadíme $\varphi(t) = (t, t^2)$

$$[y = x^2]: \lim_{\substack{t\to 0 \\ y=x^2}} \frac{x^2\, x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=x^2}} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$




Závěr: limita neexistuje!

(Proč? – Cv.)

# Derivace funkcí více prom.

Definice 11: mějme $f: G \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definovanou na okolí bodu $a=(a_1,\dots,a_d)$.

Pak funkci (i-tá proměnná)

$$g_i(x) = f(a_1,\dots,a_{i-1}, x, a_{i+1},\dots,a_d)$$

nazýváme i-tou parc. fcí $f$ v bodě $a$.

Parc. derivací fce $f$ podle i-té prom v bodě $a$ rozumíme: $f_i(a) = f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g_i(a+h)-g_i(a)}{h} =$$

$$= \lim_{x_i\to a_i} \frac{f(a_1,\dots,x_i,\dots a_d)-f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_d)}{x_i-a_i}$$

Parc. derivace vyšších řádů:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ lze chápat jako fci $d$-prom.

(závisí na $\underline{a}$: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$).

$f_{x_i,x_j} = (f_{x_j})_{x_i}$ resp. $f_{i,j} = (f_j)_i$,

resp. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ ...

Indexy se „čtou zprava".

<u>Úmluva</u>: Připouštíme pouze konečné P.D.

<u>Příklad 12</u>: $f(x,y,z) = x^2y + z + 6$

$f_x = y \cdot 2x + 0 + 0$, $f_y = x^2 + 0 + 0$, $f_z = 0 + 1 + 0$

• $f(x,y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$

na souřadnicových osách je $f \equiv 0$.

$f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$.

Tedy P.D. v bodě $(0,0)$ existují, ačkoliv je funkce $f$ v $(0,0)$ nespojitá.

---

• $f(x,y) = x \cdot y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$

$f_{x,y}(0,0) \neq f_{y,x}(0,0)$ <u>HW.</u>

<u>Může</u> tedy záležet na pořadí derivování.

<u>Věta 13</u>: Nechť má funkce $f$ na okolí $a \in \mathbb{R}^d$ spojité derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Pak $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}$